

FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)
Sep. 2002 - Original

PROBLEMA 2.1.1

Tenemos tres cargas dispuestas sobre una circunferencia como indica la figura P2.1.1. Calcular el campo y potencial en el origen de coordenadas O.

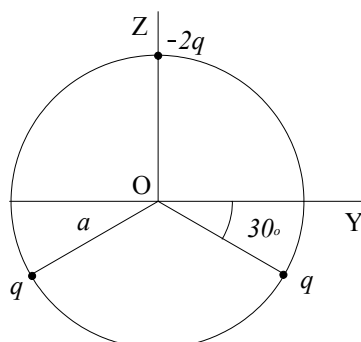


Figura P2.1.1

Solución

Tenemos que calcular las siguientes expresiones para el potencial y el campo respectivamente:

$$V = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} \quad ; \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)$$

donde $\mathbf{r} = 0$.

Etiquetamos las cargas como $i = 1, 2, 3$, empezando por la superior y siguiendo el orden de las agujas del reloj. Entonces tenemos que los valores de las cargas son,

$$q_1 = -2q, \quad q_2 = q_3 = q$$

Y sus vectores de posición,

$$\mathbf{r}'_1 = a \mathbf{u}_z,$$

$$\mathbf{r}'_2 = a(\mathbf{u}_y \cos 30^\circ - \mathbf{u}_z \sin 30^\circ) = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}\mathbf{u}_z\right)$$

$$\mathbf{r}'_3 = a(-\mathbf{u}_y \cos 30^\circ - \mathbf{u}_z \sin 30^\circ) = a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}\mathbf{u}_z\right)$$

Las distancias al punto de cálculo son iguales para las tres cargas,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i| = a$$

como se deduce fácilmente del hecho que las tres cargas están situadas sobre una circunferencia de radio a y que el punto de cálculo de potencial y campo sea el centro de ésta.

Se deja como ejercicio llegar a esta conclusión algebraicamente, dados \mathbf{r} , \mathbf{r}'_1 , \mathbf{r}'_2 y \mathbf{r}'_3 . Ya podemos calcular las expresiones de V y \mathbf{E} .

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a} + \frac{q_3}{a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{-2q}{a} + \frac{q}{a} + \frac{q}{a} \right) = 0$$

es decir, el potencial es nulo en el origen.

Para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{-2q}{a^3} (0 - a\mathbf{u}_z) + \frac{q}{a^3} \left(0 - a \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}\mathbf{u}_z \right) \right) + \frac{q}{a^3} \left(0 - a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}\mathbf{u}_z \right) \right) \right\}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{-2q}{a^2} (-\mathbf{u}_z) + \frac{q}{a^2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y + \frac{1}{2}\mathbf{u}_z \right) + \frac{q}{a^2} \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{u}_y + \frac{1}{2}\mathbf{u}_z \right) \right)$$

Agrupando los términos según su vector unitario,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi a^2 \epsilon_o} \left(\mathbf{u}_z \left(2q + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \right) + \mathbf{u}_y \left(-q\frac{\sqrt{3}}{2} + q\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi a^2 \epsilon_o} (3q\mathbf{u}_z + 0\mathbf{u}_y) = \frac{3q}{4\pi a^2 \epsilon_o} \mathbf{u}_z$$

Es decir, el campo tiene dirección z positiva.

PROBLEMA 2.1.2

Dado el circuito indicado en la figura P2.1.2, calcular el circuito equivalente Thévenin visto desde los terminales AB.

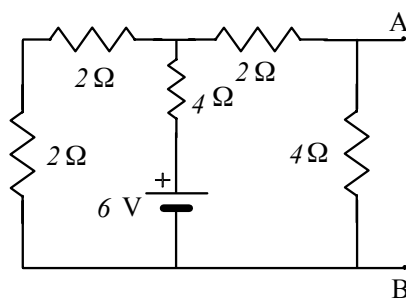


Figura P2.1.2

Solución

Calculamos primero el voltaje Thévenin. Recordamos la Ley de Ohm: *la diferencia de potencial en los extremos de una resistencia es igual a la corriente que circula por ésta multiplicada por el valor de la resistencia*. Vemos que, justamente, los terminales A y B son los extremos de la resistencia que forma parte de la rama más a la derecha del circuito. Como el valor de esta resistencia es 4Ω , el voltaje del circuito Thévenin equivalente está dado por,

$$V_{AB} = R_{AB} I = 4I$$

donde I es la corriente que circula por esa rama del circuito.

Para hallar I tenemos que resolver el circuito. Para ello aplicamos el método de las mallas. Llamamos I_1 a la corriente en la malla izquierda, suponiendo que circula en sentido horario. Llamamos I_2 a la corriente que circula por la malla derecha, también en sentido horario. Vemos que I_2 es la intensidad I que buscamos para resolver el voltaje equivalente,

$$I = I_2$$

Planteamos las ecuaciones por el método de mallas:

Para la malla 1 (izquierda):

$$-6 = I_1(2 + 2 + 4) - 4I_2$$

$$-6 = 8I_1 - 4I_2$$

donde "-6" aparece porque según el sentido elegido, la corriente sale por el polo negativo de la pila.

Para la malla 2 (derecha):

$$6 = -4I_1 + (2 + 4 + 4)I_2$$

$$6 = -4I_1 + 10I_2$$

Escribimos el sistema resultante, ya simplificado:

$$-3 = 4I_1 - 2I_2$$

$$3 = -2I_1 + 5I_2$$

Puesto que nos interesa I_2 , multiplicamos la 2ª ecuación por 2 y sumamos con la primera:

$$-3 = 4I_1 - 2I_2$$

$$6 = -4I_2 + 10I_2$$

$$3 = 8I_2 \rightarrow I_2 = \frac{3}{8} \text{ A}$$

Calculamos ,

$$V_{AB} = 4I = 4I_2 = 1,5 \text{ V}$$

Para hallar la resistencia equivalente cortocircuitamos la batería y vemos qué resistencia se ve **desde los terminales A-B**. Esto es importante para elegir la agrupación de las resistencias.

En la malla izquierda, las 2 ramas con resistencias de 2Ω están en serie. Por tanto,

$$R' = 2 + 2 = 4\Omega$$

Esta resistencia R' está en paralelo con la resistencia de 4Ω de la rama común:

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$R'' = 2 \Omega$$

La resistencia R'' está en serie con la otra resistencia de 2Ω con la que comparte malla (no contamos la resistencia de R_{AB} porque justamente sus extremos forman los terminales A-B desde los que calculamos el total). Por tanto,

$$R''' = R'' + 2 = 2 + 2 = 4 \Omega$$

Desde los terminales A-B se ve a la resistencia R''' en paralelo con la resistencia de la rama A-B R_{AB} ,

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{R'''} + \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$R_o = 2 \Omega$$

PROBLEMA 2.1.3

En la figura P2.1.3a representamos un circuito con una fuente E_o de 2 V, en serie con una resistencia de 200Ω y un diodo D. La curva $V-I$ característica del diodo se representa en la figura P2.1.3b.

Calcular los valores de V e I que corresponden al punto de operación. Si se reduce la tensión de la fuente a 1,5 V, ¿qué valores tendrá el punto de operación?

Solución

De la misma forma que en el ejemplo 13.2 del libro de teoría, aplicamos el método de la línea de carga. La ecuación de la línea viene dada por:

$$V_o = RI_d + V_d$$

en nuestro caso, $V_o = 2$ y $R = 200$. Sustituyendo,

$$2 = 200I_d + V_d$$

Representamos esta recta en el diagrama. Lo más fácil es obtener los dos puntos de corte con los ejes (V_d ; I_d) y trazar la recta que pasa por ellos. Éstos son:

$$V_d = 0, \quad \Rightarrow \quad I_d = \frac{2}{200} = 0,01 \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

$$I_d = 0, \quad \Rightarrow \quad V_d = 2 \text{ V}$$

Al representar esta recta (ver figura P2.1.3b) vemos que el punto de corte con la curva del diodo (punto de operación) es aproximadamente,

$$(V_d; I_d) \simeq (0,7 \text{ V} ; 6,5 \text{ mA})$$

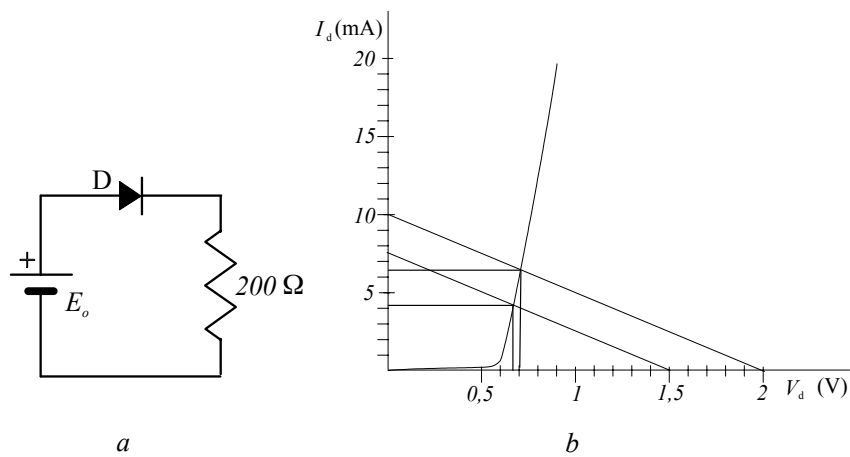


Figura P2.1.3

Ahora disminuimos la tensión de salida a $V'_o = 1,5 \text{ V}$. La nueva línea de carga vendrá dada por los siguientes puntos en los ejes:

$$V_d = 0, \quad \Rightarrow \quad I_d = \frac{1,5}{200} = 0,0075 \text{ A} = 7,5 \text{ mA}$$

$$I_d = 0 \quad \Rightarrow \quad V_d = 1,5 \text{ V}$$

Representamos la recta (ver figura P2.1.3b) y obtenemos el punto de operación:

$$(V_d; I_d) \simeq (0,65 \text{ V} ; 4,5 \text{ mA})$$